Subiectul I Test grilă, complement simplu (3p x 10 itemi=30 puncte)

Barem grilă

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	**c**	**a**	**c**	**b**	**b**	**d**	**a**	**d**	**c**

Subiectul II Probleme (30 puncte)

Problema 1 Ziua Astronomică (10 puncte)

Radu observă Soarele din emisfera nordică la o latitudine geografică necunoscută φ. Acesta dorește să analizeze fenomene legate de răsăritul/apusul Soarelui și durata unei zile. Se neglijează refracția atmosferică. Diametrul unghiular al Soarelui este $\theta_\odot = 32'$, iar înclinarea axei Pământului este $\varepsilon = 23.44°$. Notăm cu h înălțimea Soarelui deasupra orizontului, cu H unghiul orar, iar cu δ declinația. Se consideră viteza unghiulară a rotației Pământului $15°/\text{h}$.

(a) **(1p)** Determinați o relație trigonometrică între h, δ, H, φ.

(b) **(3p)** Considerăm că **răsăritul** începe la *primul contact* al discului solar cu orizontul și se termină când *ultimul punct* al discului trece deasupra orizontului. Determinați durata răsăritului în funcție de φ, δ și $\theta_\odot$.

(c) **(2p)** Considerând Soarele punct material pe cer ($\theta_\odot = 0$), determinați durata zilei astronomice (intervalul de timp în care centrul Soarelui se află deasupra orizontului).

(d) **(4p)** Radu măsoară **diferența** dintre durata zilei astronomice la solstițiul de vară și cea la solstițiul de iarnă:

$$\Delta\tau = \tau_{\text{vară}} - \tau_{\text{iarnă}} = 7\,\text{h}\,34\,\text{min}.$$

Ajutați-l pe Radu să determine latitudinea φ a locului unde se află.

În cazul în care este nevoie se va folosi identitatea $\arccos(-u) = 180° - \arccos(u)$

Barem

(a) **(1p)**
Relația fundamentală obținută aplicând teorema cosinusului în triunghiul sferic Polul Nord Ceresc–Zenit–Soare:

$$\boxed{\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos H} \qquad (1\text{p})$$

(b) (3p)
Folosim relația de la (a) și rezolvăm după $\cos H$:

$$\cos H = \frac{\sin h - \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta} \qquad (0{,}4\text{p})$$

Discul solar are diametrul unghiular $\theta_\odot$, deci raza unghiulară este $\theta_\odot/2$.

La răsărit/apus cu disc, centrul Soarelui nu este la $h = 0$:

- început răsărit (primul contact): marginea superioară pe orizont $\Rightarrow h = -\theta_\odot/2$ (0,3p)
- sfârșit răsărit (ultimul punct trece deasupra): marginea inferioară pe orizont $\Rightarrow h = +\theta_\odot/2$ (0,3p)

Definim (ca mărimi pozitive) unghiurile orare corespunzătoare:

$$H_1 = \arccos\left(\frac{\sin(-\theta_\odot/2) - \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta}\right) \qquad \text{(început apus)} \qquad (0{,}5\text{p})$$

$$H_2 = \arccos\left(\frac{\sin(+\theta_\odot/2) - \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta}\right) \qquad \text{(sfârșit apus)} \qquad (0{,}5\text{p})$$

În timpul răsăritului, unghiul orar trece de la $-H_1$ la $-H_2$, deci:

$$\Delta H = H_1 - H_2 \qquad (0{,}2\text{p})$$

Transformare în timp (Pământul: 15°/h):

$$\boxed{\Delta t_{\text{ras}} = \frac{\Delta H}{15^\circ/\text{h}} = \frac{H_1 - H_2}{15^\circ}\,\text{h}} \qquad (0{,}8\text{p})$$

(La apus se obține aceeași durată.)

(c) (2p)
Soare punct material: $\theta_\odot = 0 \Rightarrow$ răsărit/apus atunci când centrul Soarelui este pe orizont, adică $h = 0$. (0,4p)

Din relația de la (a),

$$0 = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos H_0,$$

$$\cos H_0 = -\tan\varphi\,\tan\delta \quad \Rightarrow \quad H_0 = \arccos(-\tan\varphi\,\tan\delta)\,. \qquad (0{,}6\text{p})$$

Unghiul orar variază de la $-H_0$ la $+H_0$, deci variația totală este $2H_0$. Dacă $\omega_\oplus$ este viteza unghiulară a rotației Pământului, atunci durata zilei astronomice este:

$$\boxed{\tau(\varphi,\delta) = \frac{2H_0}{\omega_\oplus} = \frac{2}{\omega_\oplus}\arccos(-\tan\varphi\,\tan\delta)}$$

$$\boxed{\tau(\varphi,\delta) = \frac{2}{15^\circ/\text{h}}\arccos(-\tan\varphi\,\tan\delta)} \qquad \text{(1p pentru oricare din cele 2 forme)}$$

(d) (4p)

La solstiții: $\delta = \pm\varepsilon$. Din (c), cu

$$H_0(\delta) = \arccos(-\tan\varphi\,\tan\delta)\,,$$

rezultă:

$$H_{\text{vară}} = \arccos(-\tan\varphi\,\tan(+\varepsilon)) = \arccos(-\tan\varphi\,\tan\varepsilon)\,, \qquad (0{,}6\text{p})$$

$$H_{\text{iarnă}} = \arccos(-\tan\varphi\,\tan(-\varepsilon)) = \arccos(\tan\varphi\,\tan\varepsilon)\,. \qquad (0{,}6\text{p})$$

Folosim identitatea $\arccos(-u) = 180^\circ - \arccos(u)$:

$$H_{\text{vară}} = 180^\circ - H_{\text{iarnă}}. \qquad (0{,}4\text{p})$$

Duratele zilei:

$$\tau_{\text{vară}} = \frac{2H_{\text{vară}}}{15^\circ/\text{h}}, \qquad \tau_{\text{iarnă}} = \frac{2H_{\text{iarnă}}}{15^\circ/\text{h}}. \qquad (0{,}4\text{p})$$

Diferența:

$$\Delta\tau = \tau_{\text{vară}} - \tau_{\text{iarnă}} = \frac{2(H_{\text{vară}} - H_{\text{iarnă}})}{15^\circ/\text{h}} = \frac{2(180^\circ - 2H_{\text{iarnă}})}{15^\circ/\text{h}}. \qquad (0{,}6\text{p})$$

Rezolvăm după $H_{\text{iarnă}}$:

$$15^\circ\Delta\tau = 360^\circ - 4H_{\text{iarnă}} \Rightarrow \boxed{H_{\text{iarnă}} = \frac{360^\circ - 15^\circ\Delta\tau}{4}}. \qquad (0{,}4\text{p})$$

Numeric:

$$\Delta\tau = 7\,\text{h}\,34\,\text{min} = 7 + \frac{34}{60}\,\text{h} = 7.5667\,\text{h}.$$

$$H_{\text{iarnă}} = \frac{360^\circ - 15^\circ\cdot 7.5667}{4} = \frac{360^\circ - 113.5^\circ}{4} = 61.625^\circ.$$

Dar

$$H_{\text{iarnă}} = \arccos(\tan\varphi\,\tan\varepsilon) \Rightarrow \tan\varphi\,\tan\varepsilon = \cos H_{\text{iarnă}},$$

deci:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\cos H_{\text{iarnă}}}{\tan\varepsilon}} \qquad (0{,}2\text{p})$$

Cu $\tan\varepsilon = \tan 23.44^\circ \simeq 0.4335$ și $\cos 61.625^\circ \simeq 0.476$:

$$\tan\varphi \simeq \frac{0.476}{0.4335} \simeq 1.10 \Rightarrow \boxed{\varphi \simeq 47.6^\circ} \qquad (0{,}8\text{p})$$

Problema 2 Fuziune în Soare (10 puncte)

Soarele își petrece cea mai mare parte a vieții în secvența principală, menținând o luminozitate constantă $L_\odot = 3,8 \times 10^{26}$ W. În această etapă, stabilitatea stelei este asigurată de fuziunea hidrogenului în heliu,

$$4\,{}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma + Q$$

proces care are loc exclusiv în nucleul central si transformă masa în energie cu un randament $\epsilon = 0,70\%$. Se cunosc masa totală a Soarelui, $M_\odot = 2,0 \times 10^{30}$ kg, și vârsta Soarelui, $\tau_\odot = 4,6$ miliarde de ani. Se presupune că la începutul vieții Soarelui, nucleul era format integral din hidrogen conținând $f_n = 10\%$ din masa totala a Soarelui.

a) **(3p)** Calculați energia totală, E_{tot}, disponibilă în nucleu prin conversia hidrogenului.

b) **(3p)** Determinați timpul de viață, τ, al Soarelui pe secvența principală. Exprimați rezultatul în ani.

c) **(4p)** Considerând poziția actuală a Soarelui pe secvența principală, determinați fracțiunile masice de hidrogen și heliu din nucleul Soarelui în acest moment.

Barem

a) Masa de hidrogen disponibilă efectiv pentru fuziune este:

$$M_H = f_n M_\odot$$

1p

Energia totală eliberată, folosind randamentul fuziunii, este:

$$\begin{aligned} E_{tot} &= M_H \cdot \epsilon \cdot c^2 \\ &= f_n M_\odot \epsilon c^2 \end{aligned}$$

1p

$$E_{tot} = 1,2 \times 10^{44} \text{ J}$$

1p

b) Timpul de viață este raportul dintre energia eliberată și rata de consum (luminozitatea):

$$\tau = \frac{E_{tot}}{L_\odot} = \frac{1,26 \times 10^{44} \text{ J}}{3,8 \times 10^{26} \text{ J/s}} \approx 3,31 \times 10^{17} \text{ secunde}$$

2p

In ani, avem:

$$\tau = \frac{3,31 \times 10^{17}}{365,25 \times 24 \times 3600} \approx 10,5 \times 10^9 \text{ ani}$$

1p

c) Energia totală radiată de Soare de la formare până în prezent (E_{rad}) este:

$$E_{rad} = L_\odot \tau_\odot$$

Defectul de masă corespunzător acestei energii (Δm), conform relației lui Einstein, este:

$$\Delta m = \frac{E_{rad}}{c^2} = \frac{L_\odot \tau_\odot}{c^2}$$

Masa de hidrogen care a trebuit să fuzioneze pentru a produce acest defect de masă este:

$$M_{H,cons} = \frac{\Delta m}{\epsilon} = \frac{L_\odot \tau_\odot}{\epsilon c^2}$$

1p

Dacă nucleul inițial a fost format integral din hidrogen, atunci masa de hidrogen rămasă în nucleu acum este

$$M_H = m_H - M_{H,cons} = f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{\epsilon c^2}$$

0,5p

Masa de heliu produsă (M_{He}), luând în calcul pierderea defectului de masă:

$$M_{He} = M_{H,cons}(1-\epsilon) = \frac{L_\odot \tau_\odot (1-\epsilon)}{\epsilon c^2}$$

1p

Masa actuală a nucleului va fi

$$M_{nucl} = M_H + M_{He} = f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{\epsilon c^2} + \frac{L_\odot \tau_\odot (1-\epsilon)}{\epsilon c^2} = f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{c^2}$$

0,5p

Fracțiunea masică de H (X):

$$X = \frac{M_H}{M_{nucl}} = \frac{f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{\epsilon c^2}}{f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{c^2}} = \frac{1,1244 \times 10^{29} \text{ kg}}{1,9939 \times 10^{29} \text{ kg}} \approx \mathbf{56,4\%}$$

0,5p

Fracțiunea masică de He (Y):

$$Y = \frac{M_{He}}{M_{nucl}} = \frac{\frac{L_\odot \tau_\odot (1-\epsilon)}{\epsilon c^2}}{f_n M_\odot - \frac{L_\odot \tau_\odot}{c^2}} = \frac{0,8695 \times 10^{29} \text{ kg}}{1,9939 \times 10^{29} \text{ kg}} \approx \mathbf{43,6\%}$$

0,5p

Observatie. Soluțiile alternative, care aproximează masa nucleului ca fiind constantă neglijând pierderea prin defect de masă, sunt punctate parțial cu 75% din punctaj (maxim 3 din 4 puncte).

Problema 3 Norul de hidrogen (10 puncte)

Hidrogenul neutru (HI) din discul Galaxiei emite o linie spectrală la frecvența de $\nu_0 = 1420,405$ MHz datorită tranziției hiperfine a spinului electronului. Această radiație penetrează praful interstelar, permițând cartografierea structurii galaxiei. Presupunem că Soarele și regiunile HI se deplasează pe orbite aproape circulare în jurul centrului galactic, iar Soarele se află la o distanță $R_\odot = 8,5$ kpc de centrul galactic și se deplasează cu o viteză orbitală $V_\odot = 220$ km s^{-1}. La o longitudine galactică $l = 30°$, se măsoară o viteză radială maximă (relativă la Soare), numită viteză terminală, de $v_T = 125$ km s^{-1}.

a) **(6p)** Determinați viteza orbitală liniară si raza galactocentrică a norului de gaz HI pentru care s-a măsurat viteza terminală de $v_T = 125$ km s^{-1}.

b) **(4p)** Determinați intervalul de frecvențe observate de pe Pământ pentru regiunile HI aflate la o longitudine galactică $l = 30°$. Se cunoaște viteza luminii, $c = 300.000$ km/s.

Barem

a) Viteza terminală v_T corespunde punctului în care linia de vizare este tangentă la orbita circulară a gazului HI. În acest punct, vectorul viteză al norului este orientat exact de-a lungul razei vizuale, iar raza sa galactocentrică R este perpendiculară pe linia de vizare. Din geometria sistemului, relația dintre raza norului și distanța Soarelui față de centru este:

$$R = R_\odot \sin(l)$$

2p

Viteza radială observată v_r este proiecția vitezei orbitale a norului minus proiecția vitezei orbitale a Soarelui pe linia de vizare. În punctul tangent, proiecția vitezei norului este maximă, astfel:

$$v_T = V - V_\odot \sin(l) \implies V = v_T + V_\odot \sin(l)$$

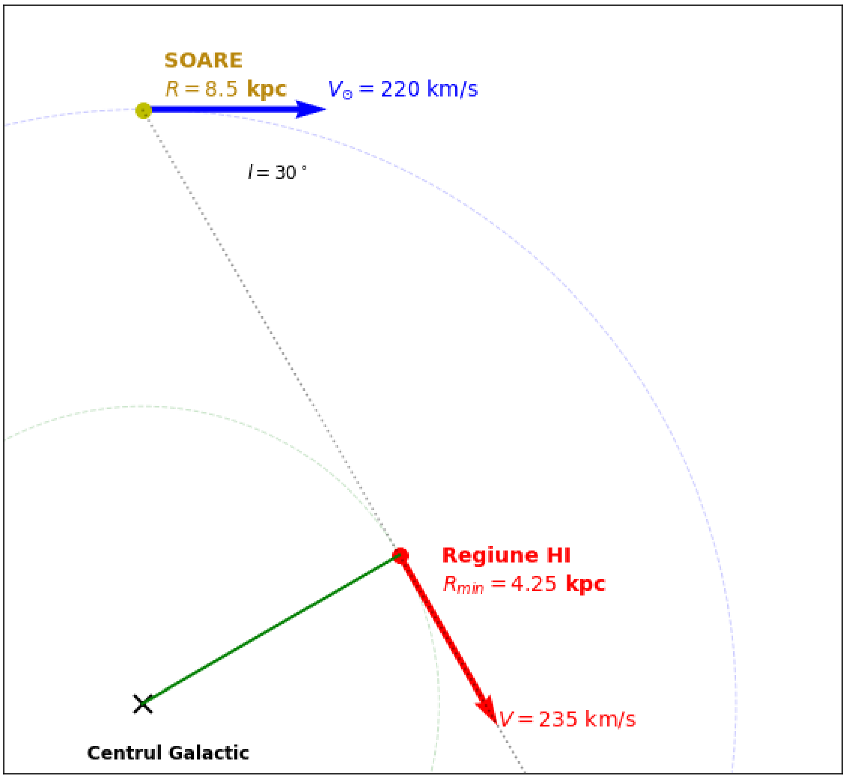
2p

Introducând valorile numerice ($R_\odot = 8,5$ kpc, $V_\odot = 220$ km/s, $l = 30°$, $v_T = 125$ km/s):

$$R = 8,5 \cdot \sin(30°) = 8,5 \cdot 0,5 = 4,25 \text{ kpc}$$

$$V = 125 + 220 \cdot \sin(30°) = 125 + 110 = 235 \text{ km/s}$$

2p



b) Frecvența observată este influențată de efectul Doppler în funcție de viteza radială v_r de-a lungul liniei de vizare. Pentru o longitudine galactică $0 < l < 90°$, viteza radială este pozitivă (recesiune) și variază între 0 (pentru gazul aflat în vecinătatea Soarelui) și valoarea maximă v_T. Formula frecvenței observate este:

$$\nu_{obs} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right)$$

1p

Intervalul de frecvențe $[\nu_{min}, \nu_{max}]$ corespunde intervalului de viteze $[0, v_T]$:

$$\nu_{max} = \nu_0 \left(1 - \frac{0}{c}\right) = \nu_0$$

$$\nu_{min} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_T}{c}\right)$$

2p

Introducând valorile numerice ($\nu_0 = 1420,405$ MHz, $v_T = 125$ km/s, $c \approx 300.000$ km/s):

$$\nu_{max} = 1420,405 \text{ MHz}$$

$$\nu_{min} = 1420,405 \cdot \left(1 - \frac{125}{300.000}\right) \approx 1419,813 \text{ MHz}$$

1p

Subiectul III Hartă Mută (30 puncte)

Ați primit o hartă a cerului pentru un punct de pe suprafața Pământului, de longitudine $L = 1°29'39"$ E din data de 24.01.2025, la o ora necunoscută, în proiecție azimutală. Analizând harta, rezolvați itemii de mai jos. Scrieți pe foaie numărul item-ului la care răspundeți și apoi scrieți rezolvarea. Unde este cazul, faceți trimitere la notațiile de pe hartă. De exemplu la itemul 6, veți scrie: 6. vezi harta, iar pe hartă vor apărea notațiile corespunzătoare.

1. Identifică pe hartă punctele cardinale și noteazăle pe marginea harții. **[2p]**
2. Pe hartă desenează și numește: meridianul, ecliptica, ecuatorul ceresc și ecuatorul galactic. **[4p]**
3. Pe hartă desenează și numește cercul de circumpolaritate și cercul de precesie. **[3p]**
4. Determină timpul sideral al hărții. **[3p]**
5. Pe hartă desenează și numește almucantaratul stelelor Algol (β Per) și Schedar (α Cas). **[2p]**
   Determină distanța unghiulară dintre cele două almucantarate. **[2p]**
6. Figurează pe hartă constelațiile Gemini, Cancer, Leo, Leo Minor. **[4p]**
7. Notează pe hartă pozițiile obiectelor M35, M44, M42, M45 **[4p]**
8. Care este timpul legal corespunzător harții? **[3p]**
9. Determină latitudinea locului. **[3p]**

Notă: Harta mută, rezolvată de elev, se va preda împreună cu teza, fiind atașată acesteia prin capsare.

Barem

1. Vezi harta **[2p]**

2. Vezi harta **[4p]**

3. Vezi harta **[3p]**

4. Scrie $H_{\text{soare}} + \alpha_{\text{Soare}} = t_{\text{sideral}}$ [**0.5p**]

   $\alpha_{\text{Soare}} = 12\text{h} + \frac{N_{\text{zile}}}{89}$ [**0.5p**]

   Față de echinocțiul de primăvară se numără 309 zile. [0.5p]

   $\alpha_{\text{Soare}} = 20h18min$ [**0.5p**]

   $T_S \approx 8h53min + 20h18min - 24h = 5\text{h } 11 \text{ min}$ (se admite o eroare de ± 25 min)[**1p**].

4. Vezi harta. Almucantaratul Algol (β Per) [**1p**] și Schedar (α Cas) [**1p**]. Distanța unghiulară dintre cele două almucantarate 28°36' (se admite o eroare de $\pm 2°$).[**2p**]

5. Vezi harta. Se oferă câte 1 punct pentru fiecare constelație corect identificată. [**4p**]

6. Vezi harta. Se oferă câte 1 punct pentru fiecare obiect Messier corect identificat. [**4p**]

7. scrie ecuația timpului legal

   $t_{legal} = H_{soare} + 12h - L + nr.fuse(+1h) + \eta$ [**1p**]

   $H_{soare} = 8h53m$ [**0.5p**]

   Se considera meridianul fusului UTC+1. L transformat in timp = 1,44°x 4 min = 6 min [**0.5p**]

   Din graficul ecuatiei timpului soarele intarzie 12 minute. [**0.5p**]

   $\text{T}_l = 8h53m + 12h - 6m + 1h(fus) + 12m = 21h59m$ [**0.5p**]

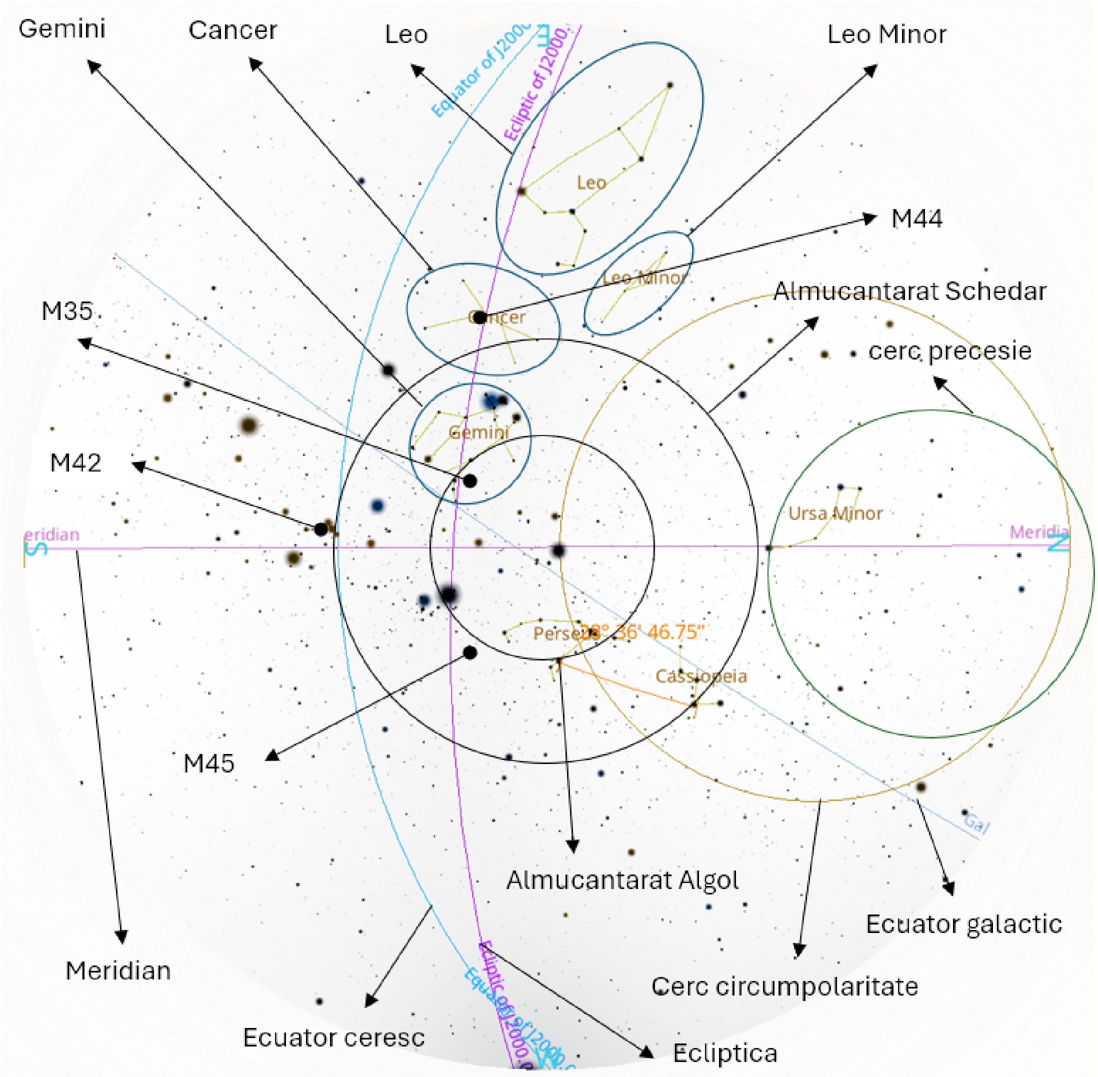
   Se puncteza si valorile determinate in marja de eroare $T_l = 21h59m \pm 25$ min

8. Scrie relația latitudinii locului egală cu înălțimea stelei Polare deasupra orizontului: $\approx h_{Polaris}$ [**1p**]

   Efectueaza calcul scara harta ex. $90° = 68mm \cdot 1mm \approx 1,3235°$[**1p**]

   $\varphi = 39mmx1,3235°/mm = 51,6°N$ [**1p**]

   $\varphi = 51.6°$ (se admite o eroare de $\pm 5°$)


Gemini
Cancer
Leo
Leo Minor
M44
Almucantarat Schedar
cerc precesie
M35
M42
Ursa Minor
Perseus
Cassiopeia
M45
Almucantarat Algol
Ecuator galactic
Meridian
Cerc circumpolaritate
Ecuator ceresc
Ecliptica